

УДК 681.5

М. Г. Зотов, д-р техн. наук, проф.

(Московский институт электроники и математики

национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»)

zotova35@mail.ru

**АЛГОРИТМ КОНСТРУИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РОБАСТНОГО РЕГУЛЯТОРА
ДЛЯ ОБЪЕКТОВ НА ГРАНИ УСТОЙЧИВОСТИ**

Показано, что если передаточная функция объекта управления имеет нули или полюсы на мнимой оси, т. е. объект находится на грани устойчивости, то характеристический полином оптимальной системы также будет иметь корни на мнимой оси, что, естественно, неприемлемо. Приведён алгоритм, позволяющий решить эту проблему.

Ключевые слова: робастная устойчивость; робастный регулятор; конструирование систем управления.

When the transfer function of the control object has zeros or poles on the imaginary axis, i. e. the object is on the verge of stability, the characteristic polynomial optimal system will also have roots on the imaginary axis, which is naturally unacceptable. The algorithm allows to solve this problem is reduced.

Key words: Robust stability; robust controller; control system design.

Введение. Рассмотрим существующие методики конструирования оптимальных систем в пространстве вход—выход на примере управляющего устройства с одним звеном коррекции $W_1(s) = V_1(s)/G_1(s)$ [1]. Такая система приведена на рис. 1, а. Отметим, что на рис. 1 $W_0(s) = Q_0(s)/P_0(s)$ — передаточная функция математической модели реального объекта управления. Передаточная функция реального объекта $W_0^*(s) = Q_0^*(s)/P_0^*(s)$. Для неё имеет место соотношение

$$\begin{aligned} W_0(s) &\approx W_0^*(s), \deg Q_0(s) = \deg Q_0^*(s), \\ \deg P_0(s) &= \deg P_0^*(s). \end{aligned} \quad (1)$$

Оптимальное управляющее устройство конструируется для модели объекта с передаточной функцией $W_0(s)$, а функционировать оно должно на реальном объекте.

Согласно алгоритму, из условия оптимума критерия качества определяется оптимальное значение передаточной функции $\tilde{H}(s)$ системы относительно задающего воздействия $g_1(t)$ и выхода $y(t)$:

$$\begin{aligned} \tilde{H}(s) &= \frac{\tilde{M}(s)}{\tilde{N}(s)} = \frac{W_1(s)W_0(s)}{1 + W_1(s)W_0(s)} = \\ &= \frac{V_1(s)Q_0(s)}{G_1(s)P_0(s) + V_1(s)Q_0(s)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Алгоритм поиска построен так, что все корни полинома $\tilde{N}(s)$ всегда находятся в левой полуплоскости. Определяется значение передаточной функции звена коррекции

$$\begin{aligned} W_1(s) &= \frac{V_1(s)}{G_1(s)} = \frac{\tilde{H}(s)}{(1 - \tilde{H}(s))W_0(s)} = \\ &= \frac{\tilde{M}(s)}{\tilde{N}(s) - \tilde{M}(s)} \frac{P_0(s)}{Q_0(s)}. \end{aligned} \quad (3)$$

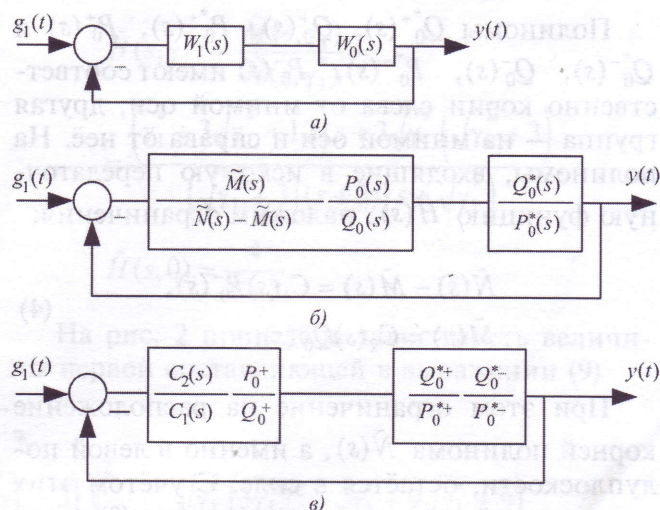


Рис. 1. Этапы конструирования передаточной функции регулятора (звена коррекции):

а — система управления со звеном коррекции в прямой цепи; б — система управления в составе реального объекта и звена коррекции; в — система управления с реальным объектом и сконструированным регулятором

На рис. 1, б приведена схема в составе реального объекта и спроектированного регулятора. Из схемы видно, что звено коррекции компенсирует передаточную функцию объекта управления, и если производится компенсация правых корней, то система будет неустойчивой, если корней, лежащих на мнимой оси, — то на грани устойчивости. Заметим, что речь идёт не о тождественных, а о близких корнях. Итак, спроектированная оптимальная система не будет робастной относительно свойства устойчивости, если в передаточной функции объекта имеются лежащие на мнимой оси и справа от неё нули и полюсы. Решение задачи коррекции алгоритма расчёта, когда корни полиномов $Q_0(s)$ и $P_0(s)$ находятся справа от мнимой оси, было рассмотрено в работе [1]. Случай, когда корни полиномов находятся на мнимой оси, в работе [1] не рассматривался. Этому вопросу и посвящена настоящая статья.

Постановка задачи. Внести коррекцию в методику конструирования передаточной функции регулятора с тем, чтобы исключить возможность компенсации передаточной функцией регулятора находящихся на мнимой оси нулей и полюсов передаточной функции объекта управления.

Решение задачи. Передаточные функции реального объекта и его модели имеют вид:

$$W_0^*(s) = Q_0^{*+} Q_0^{*-} / P_0^{*+} P_0^{*-}, \\ W_0(s) = Q_0^+ Q_0^- / P_0^+ P_0^-.$$

Полиномы $Q_0^{*+}(s)$, $Q_0^+(s)$, $P_0^{*+}(s)$, $P_0^+(s)$ и $Q_0^{*-}(s)$, $Q_0^-(s)$, $P_0^{*-}(s)$, $P_0^-(s)$ имеют соответственно корни слева от мнимой оси, другая группа — на мнимой оси и справа от неё. На полиномы, входящие в искомую передаточную функцию $\tilde{H}(s)$, наложим ограничения:

$$\tilde{N}(s) - \tilde{M}(s) = C_1(s) P_0^-(s), \\ \tilde{M}(s) = C_2(s) Q_0^-(s). \quad (4)$$

При этом ограничение на расположение корней полинома $\tilde{N}(s)$, а именно в левой полуплоскости, остаётся в силе. С учётом этих ограничений передаточная функция (3) звена коррекции запишется в виде:

$$W_1(s) = \frac{V_1(s)}{G_1(s)} = \frac{C_2(s) P_0^+}{C_1(s) Q_0^+}. \quad (5)$$

На рис. 1, в приведена схема с реальным объектом и звеном коррекции с передаточной функцией (5). Как видно, в ней передаточная функция звена коррекции уже не компенсирует корней передаточной функции реального объекта на мнимой оси и лежащих справа от неё. Заметим, что из (4) следует полином

$$C_1(s) P_0^-(s) + C_2(s) Q_0^-(s) = \tilde{N}(s) \quad (6)$$

с корнями из левой полуплоскости. Примем, что это свойство сохраняется и для передаточной функции реального объекта.

Примем, что в (4) корни полиномов $P_0^-(s)$ и $Q_0^-(s)$ лежат только на мнимой оси. Рассмотрим выражения:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \left(1 - \tilde{H}(s) \right) \frac{1}{P_0^-(s)} \right|^2 ds = \\ & = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{\tilde{N}(s) - \tilde{M}(s)}{\tilde{N}(s)} \frac{1}{P_0^-(s)} \right|^2 ds, \\ & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \tilde{H}(s) \frac{1}{Q_0^-(s)} \right|^2 ds = \\ & = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{\tilde{M}(s)}{\tilde{N}(s)} \frac{1}{Q_0^-(s)} \right|^2 ds. \end{aligned} \quad (7)$$

Известно [1, 2], что интегралы (7) расходятся, если степень числителя выражения под знаком модуля выше или равна степени знаменателя, или корни знаменателя находятся на мнимой оси.

Если с некоторым весом ввести эти выражения в функционал, оценивающий качество системы, а его для решения задачи нужно минимизировать, то это приведёт к выполнению ограничений (4). Поясним примером.

Пример. Модель объекта задана передаточной функцией $W_0(s) = Q_0(s)/P_0(s) = 1/s$. Желаемая передаточная функция относительно задающего воздействия $P_1(s) = 4/(s+3)$. Искомое звено коррекции, как показано на рис. 1, а, расположено в прямой цепи. Из условия минимума близости передаточной функции системы $\tilde{H}(s)$ относительно задающего воздействия $g_1(t)$ к $P_1(s) = 4/(s+3)$ определить значение $W_1(s)$ передаточной функции звена коррекции.

Из условия задачи запишем критерий, оценивающий близость передаточной функции системы $\tilde{H}(s)$ к $P_1(s)$:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \left(\frac{4}{s+3} - \tilde{H}(s) \right) \right|^2 ds. \quad (8)$$

Из (8) следует, что подходящим решением может быть $\tilde{H}(s) = P_1(s)$. Передаточная функция звена коррекции имеет вид:

$$W_1(s) = \frac{\tilde{H}}{W_0(s)(1 - \tilde{H}(s))} = \frac{P_0(s)M(s)}{Q_0(s)(N(s) - M(s))} = \frac{4s}{s-1}.$$

Запишем характеристический полином системы с реальным объектом, имеющим передаточную функцию $W_0^*(s) = Q_0^*(s)/P_0^*(s) = 1/(s \pm \varepsilon)$, где ε малое число:

$$T^*(s) = P_0^*(s)G_1(s) + Q_0^*(s)V_1(s) = s^2 + (3 \pm \varepsilon)s \mp \varepsilon.$$

Из характеристического полинома следует, что сконструированная система свойством грубости относительно устойчивости не обладает.

Для устранения этого недостатка в исходный функционал с некоторым весом γ_1^* введём ограничение из (7):

$$I_2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{4}{s+3} - \tilde{H}(s) \right|^2 ds + \gamma_1^* \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \left| 1 - \tilde{H}(s) \right| \frac{1}{s} ds. \quad (9)$$

Минимальное значение I_2 достигается, если искомая функция $\tilde{H}(s)$ удовлетворяет уравнению Винера—Хопфа:

$$\left(1 + \gamma_1^* \frac{1}{s(-s)} \right) \tilde{H}(s) - \left(\frac{4}{s+3} + \gamma_1^* \frac{1}{s(-s)} \right) = \Gamma(s).$$

$$I_{21}(\gamma_1^*) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{4}{s+3} - \frac{(\gamma_1^* + 3\sqrt{\gamma_1^*} + 12)s + 3\sqrt{\gamma_1^*}(\sqrt{\gamma_1^*} + 3)}{(\sqrt{\gamma_1^*} + 3)(s+3)(s+\sqrt{\gamma_1^*})} \right|^2 ds = \frac{\sqrt{\gamma_1^*}(3\gamma_1^{*3/2} - 5\gamma_1^* + 9\sqrt{\gamma_1^*} + 9)}{6(\sqrt{\gamma_1^*} + 3)^3},$$

$$\lim_{\gamma_1^* \rightarrow \infty} I_{21}(\gamma_1^*) = \infty, \quad I_{21}(0) = 0.$$

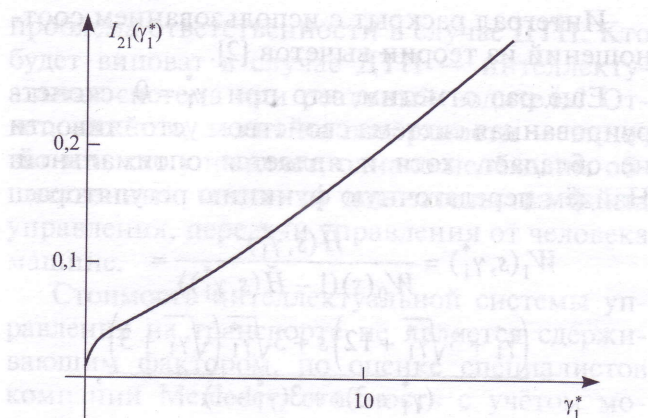


Рис. 2. График зависимости составляющей критерия качества от коэффициента γ_1^*

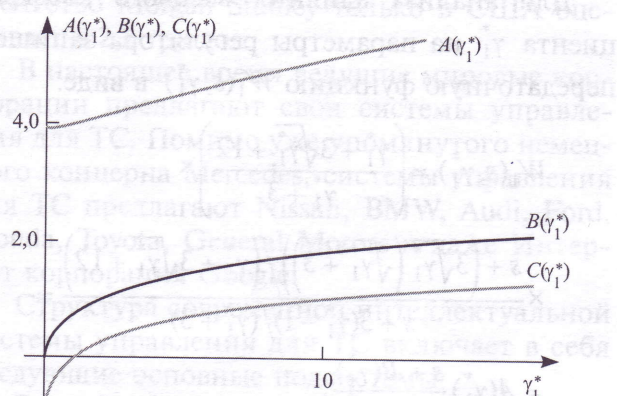


Рис. 3. График зависимости параметров звена коррекции от коэффициента γ_1^*

Решая его, найдём

$$\begin{aligned} \tilde{H}(s, \gamma_1^*) &= \frac{\tilde{M}(s, \gamma_1^*)}{\tilde{N}(s, \gamma_1^*)} = \\ &= \frac{(\gamma_1^* + 3\sqrt{\gamma_1^*} + 12)s + 3\sqrt{\gamma_1^*}(\sqrt{\gamma_1^*} + 3)}{(\sqrt{\gamma_1^*} + 3)(s+3)(s+\sqrt{\gamma_1^*})}. \\ \tilde{H}(s, 0) &= \frac{4}{s+3} \end{aligned}$$

На рис. 2 приведена зависимость величины первой составляющей в выражении (9)

Интеграл раскрыт с использованием соотношений из теории вычетов [2].

Ещё раз отметим, что при $\gamma_1^* = 0$ сконструированная система свойством устойчивости не обладает, хотя и является оптимальной. Найдём передаточную функцию регулятора:

$$W_1(s, \gamma_1^*) = \frac{\tilde{H}(s, \gamma_1^*)}{W_0(s)(1 - \tilde{H}(s, \gamma_1^*))} = \frac{(\gamma_1^* + 3\sqrt{\gamma_1^*} + 12)s + 3\sqrt{\gamma_1^*}(\sqrt{\gamma_1^*} + 3)}{(\gamma_1^* + 3)s + 3(\gamma_1^* - 1)},$$

$$W_1(s, 0) = \frac{4s}{s - 1}.$$

Для анализа влияния весового коэффициента γ_1^* на параметры регулятора запишем передаточную функцию $W_1(s, \gamma_1^*)$ в виде:

$$W_1(s, \gamma_1^*) = \left(\frac{\gamma_1^* + 3\sqrt{\gamma_1^*} + 12}{\gamma_1^* + 3} \right) \times \frac{s + (3\sqrt{\gamma_1^*}(\sqrt{\gamma_1^*} + 3)) / (\gamma_1^* + 3\sqrt{\gamma_1^*} + 12)}{s + 3(\gamma_1^* - 1) / (\gamma_1^* + 3)} =$$

$$= A(\gamma_1^*) \frac{s + B(\gamma_1^*)}{s + C(\gamma_1^*)}.$$

Графики функций $A(\gamma_1^*)$, $B(\gamma_1^*)$, $C(\gamma_1^*)$ приведены на рис. 3. На них $\lim_{\gamma_1^* \rightarrow \infty} A(\gamma_1^*) = \infty$,

$\lim_{\gamma_1^* \rightarrow \infty} B(\gamma_1^*) = 3$, $\lim_{\gamma_1^* \rightarrow \infty} C(\gamma_1^*) = 3$. Используя рис. 2 и 3,

конструктору необходимо выбрать γ_1^* так, чтобы значение $B(\gamma_1^*)$ было выше нуля, а $I_{21}(\gamma_1^*)$ — близко к нулю. Подходящим мог бы быть весовой коэффициент $\gamma_1^* = 10$.

Заключение. Показано, что сконструированная оптимальная система для объекта, передаточная функция которого имеет корни на мнимой оси, свойством устойчивости не обладает.

Предложены ограничения, включение которых с некоторым весом в функционал, позволяет решить проблему робастной неустойчивости.

Эффективность предлагаемого способа продемонстрирована примером.

Библиографические ссылки

1. Зотов М.Г. Многокритериальное конструирование систем автоматического управления. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. 375 с.
2. Математические основы теории автоматического регулирования [под ред. Б. К. Чемоданова]. М.: Высшая школа, 1971. 807 с.

УДК 004.896:681.518.2

Н.В. Корнеев, д-р техн. наук, **А.В. Гребенников**
(Поволжский государственный университет сервиса, г. Тольятти)

niccyper@mail.ru

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА

Раскрыты перспективы развития интеллектуальных систем управления на транспорте. Разработана структура современной интеллектуальной системы управления для транспортного средства, определены её основные подсистемы, приведены математические зависимости, реализующие функции управления. Показана программно-аппаратная реализация предложенной структурно-функциональной схемы интеллектуальной системы для транспортного средства, где в качестве контрольного физиологического параметра были выбраны движение головы и рук водителя.

Ключевые слова: управление; интеллект; математические методы; алгоритмы; программно-аппаратное обеспечение; контроль состояния водителя.

Development prospects of intellect control systems for vehicle are opened. The structure of the modern intelligent control system for a vehicle is developed, its major subsystems is defined; mathematical dependencies implementing the control function are adduced. Software and hardware implementation of the proposed structural and functional scheme of intelligent control system for a vehicle is shown, where a movement of the driver head and hands were selected in the capacity of control of physiological parameter.

Key words: control; intellect; mathematical methods; algorithms; software and hardware; control of the driver condition.

Автоматизация. Современные Технологии

ЕЖЕМЕСЯЧНЫЙ МЕЖОТРАСЛЕВОЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЁТСЯ С 1947 ГОДА

Главный редактор

Белоусов В.Л. — д.э.н., проф., МГУПИ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Бучаченко А.Л.

Ван Сяофэн

Детярёв Ю.И.

Елисеев В.А.

Иванов А.П.

Мальцева С.В.

Микаева С.А.

Неусыпин К.А.

Нефёдов Е.И.

Никифоров В.М.

Осипова В.Г.

Пролетарский А.В.

Румянцева О.Н.

Хэ Юн

Шибанов Г.П.

Янович Е.А.

— д.х.н., проф., ИПХФ РАН

— д.т.н., проф., Нанкинский ун-т
науки и технологии (КНР)

— д.т.н., проф., МАИ

— д.т.н., проф., Ин-т инновац.-технологич.
менеджмента

— д.э.н., проф., МГУПС (МИИТ)

— д.т.н., проф., НИУ ВШЭ

— д.т.н., проф., МГУПИ

— д.т.н., проф., МГТУ им. Н.Э. Баумана

— д.ф.-м.н., ИРЭ РАН

— д.т.н., проф., ФГУП «НПЦАП
им. Н.А. Пилюгина»

— ООО «Изд-во Инновационное
машиностроение» (заместитель
главного редактора)

— д.т.н., проф., МГТУ им. Н.Э. Баумана

— генеральный директор ООО «Изд-во
Инновационное машиностроение»

— д.т.н., проф., Нанкинский ун-т науки и
технологий (КНР)

— д.т.н., проф., Гос. лётно-испытат. центр
им. В.П. Чкалова

— д.э.н., проф., Кошалинский политехнич.
ин-т (Польша)

Редактор — Лутовина О.Н.

Редактор — Селихова Е.А.

Компьютерная вёрстка — Конова Е.В.

Адрес редакции:

107076, Москва,

Колодезный пер., д. 2А, стр. 2.

Тел.: (495) 661-38-80.

E-mail: ast@mashin.ru; astmashin@yandex.ru;

<http://www.mashin.ru>

7

2015

УЧРЕДИТЕЛИ:

ОБЩЕСТВО

С ОГРАНИЧЕННОЙ ОТВЕТСТВЕННОСТЬЮ

"НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

"ИННОВАЦИОННОЕ МАШИНОСТРОЕНИЕ"

Журнал зарегистрирован 29 мая 2014 г.
за № ФС77-58102 в Роскомнадзоре

Журнал входит в перечень утверждённых ВАК РФ
изданий для публикации трудов соискателей
учёных степеней, а также в систему Российского
индекса научного цитирования (РИНЦ)

ООО "Издательство

"Инновационное машиностроение"

Адрес издательства:

107076, Москва, Колодезный пер., д. 2А, стр. 2.

Тел.: (499) 268-38-58.

Факс: (499) 269-48-97.